Lakatos Imre matematikafilozófiája

Kiss Olga

Az itt következő oldalakon Lakatos matematikafilozófiáját követve az alábbi kérdéseket fogjuk kissé körbejárni: milyen a matematikai tudás természete? Miféle világról szól; változékonyak-e vagy állandóak a tárgyai? Változnak-e az idővel a matematikai igazságok? Lakatos válasza e kérdésekre nem pusztán filozófiai vagy metamatematikai elmélkedéseken alapul. Ösztönzője és forrása műveinek a matematikatörténet. Mint írja: „Manapság, a formalizmus uralma alatt, az ember hajlik arra, hogy Kantot parafrazálja: a matematika története, a filozófia iránymutatásait nélkülözve *vakká,* a matematika filozófiája, mellőzve a matematika történetének legérdekesebb problémáit, *üressé* válik” (Lakatos 1981: 15).

A matematikafelfogásának horizontját alkotó problémaszituáció felvázolásával azt a heurisztikai stílust szeretném követni, melynek maga is szószólója volt. A tudós, mint hangsúlyozta, nem üres elmével fog a kutatáshoz (Lakatos 1981: 208, 1–2. lj.). Bevezetésként tehát felvillantok néhány gondolatot (ha filozófiatörténeti szempontból talán nem is a legfontosabbakat, ám mindenképp a szerintem legizgalmasabbakat), melyek Lakatos elméletének a hátteréhez tartoznak.

Milyen a matematika? – A platóni tradíció

Platón szerint a matematika „a lelket a magasba vezeti”, az igaz létező szemlélete felé (Platón 525d). Ezért választja az ideális állam vezetésével foglalkozó ifjak tanulmányai közé a számtant és a mértant (525c–527b), mely nem a változó s érzékeinkkel megragadható világ, hanem az örökké létező megismerésére törekszik. Ám nem a gondolkodás tárgya a fontos számára, hanem az a mód, ahogy a lélek a matematika művelése révén felemelkedik az igazsághoz: mert a matematikusok okfejtéseikben (például egy háromszögekre vonatkozó tétel bizonyításában) látható dolgokra hivatkoznak ugyan, „de közben azokat a fogalmakat keresik, amelyeket másképp, mint értelemmel, senki meg nem láthat” (Platón 510d–511a).

Platón a filozófiáról szólva hangsúlyozza, hogy a nyelvi kifejezés elvezet a megértésig, ám „a végső belátást nem lehet szavakkal kifejezni, miként az oktatás szokásos tárgyait; az érte szakadatlanul végzett közös munka és az igazi életközösség eredményeként egyszerre csak felvillan a lélekben – akárcsak egy kipattanó szikra által keltett világosság –, s azután már önmagától fejlődik tovább” (Platón 341c–d). De vajon vonatkozik-e ez a matematikára is? Nos, amikor Platón példát hoz (342a–c) a megismerés folyamatának leírására, e példa matematikai: a kör. A kör nevének, definíciójának, de még homokba rajzolt képmásának sincs köze a megismeréshez. Csak az ezekre következő negyedik lépés a belátás és a helyes vélemény: ám a megismerés tulajdonképpeni tárgya, az igazi létező, mindezektől különbözik, de „ha valaki nem fogja meg valami módon mind a négy dolgot, sohasem lesz része teljesen az ötödik megismerésében" (342d–c). A megismerés során nem ugorhatjuk át e lépéseket. Nem juthatunk azonnal a végső összefüggések birtokába – ez igaz a matematikára és a filozófiára egyaránt. De ne feledjük Platón szavait: „aki eszénél van, sohasem fog bátorságot venni magának arra, hogy a gyarló nyelv formájába öltöztesse, amit szellemével megfogott, s még kevésbé abba a merev formájába, amely az írásba rögzített nyelv tulajdonsága" (343a).

Különösen azért tanulságosak Platón e sorai, mert az őt követő évszázadokban a matematika éppen szilárd, axiomatikus formájával vívta ki az igazságra törekvők csodálatát. Úgy tűnt, a matematika igazságai épp azért lehetnek kétségbevonhatatlanok, mert bizonyosságukat e zárt logikai rend biztosítja.

Arisztotelész a második analitikában a bizonyító tudás legfőbb mintaképéül a geometriát vette. Az akkori axiómarendszerek közül külön egy sem maradt fenn, az *Elemek* egyes könyveiben feltárható eltérő nyelvi rétegek és stíluselemek azonban arra utalnak, hogy némelyiküket Eukleidész beolvasztotta saját munkájába.

A geometria Eukleidésztől ránk maradt formája a következő: az I. könyv a definíciókkal (például „Pont az, aminek nincs része"), a posztulátumokkal (például „Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható") és az axiómákkal (például „Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők") kezdődik (Euklidész 1983: 45–47), majd ezeket követik mindazon tételek, melyek ezekből levezethetőek. A bizonyításokban a fogalmakról nem tehetünk fel többet, mint amit a definíciókban rögzítettünk, s nem használhatunk fel mást, mint amit már eddig kimondtunk az axiómákban és posztulátumokban, illetve amit ezekből korábban levezettünk. A II. könyv hozzávesz néhány újabb definíciót, s az így kibővült lehetőségekkel újabb tételeket bizonyít. Mind a tizenhárom könyv lényegében ezt a rendszert követi. (Amit eredményül kapunk, az stílusában nagyjából az a matematika, amellyel a középiskolában többségünk megismerkedett – algebra és modern jelölések nélkül, sokkal több tétellel.)

Platón szerint, persze, e nyelvi forma nem meríti ki azt, ami tudható:

> Csak ha az említett négy tényező mindegyikét – a nevet, a meghatározást, a térbeli alakot és az érzékelés eredményét – sok fáradsággal összevetjük, és egymás iránt jóindulattal viseltetve, irigység nélkül, kérdések és feleletek formájában minden oldalról megvitatjuk, csak akkor fog rávillanni a kutatás minden tárgyára a megértés és az igazi belátás fénye, méghozzá olyan világossággal, hogy az már szinte nem is embernek való (344b).

Ám hosszú időre feledésbe merült, hogy milyen fontosak e dialógusok a matematikai tudás természetének megértéséhez. Századunkban Lakatos Imre volt az, aki a matematikai megismerés dialogikus természetét – immár kissé más (történetibb) megvilágításban – újra előtérbe állította.

Igazság és bizonyosság – Az axiomatikus rendszer euklideszi formája

A matematika euklideszi formája a görög matematika csúcsteljesítményének bizonyult, s az őt létrehozó kultúra hanyatlásával monumentális emlékművé vált. Mikor Európa a mórok közvetítése révén újra felfedezte az *Elemek*et, csodálta az általa elért tökéletességet. A matematika Eukleidész révén ránk maradt antik axiomatikus formája a szigorú és biztos alapelveken nyugvó tudás mintaképe lett. Descartes szabályai az értelem vezetésére a matematikai érvelést vették példaképül. Spinoza *Etiká*jának adott axiomatikus felépítést, Newton pedig főművének, *A természetfilozófia matematikai alapelvei*nek.

A geometria állításai megcáfolhatatlanok voltak, s úgy tűnt, e sajátosságukat épp az axiomatikus felépítés biztosítja. Ugyanakkor nem volt kétséges, hogy az euklideszi tér és az idő „érzéki szemléletünk formái", ahogy azt Kant a *Tiszta ész kritikájá*ban megfogalmazta, azaz – elszakadva immár Kant kategóriáitól azt mondhatjuk – az euklideszi geometria a minket körülvevő euklideszi tér tiszta fogalmi formába öntése. Elég megrázó volt hát, amikor Bolyai és Lobacsevszkij egymástól függetlenül, nagyjából egyszerre bizonyították be a nem-euklideszi geometria létjogosultságát. Azt persze továbbra is nehéz volt kétségbe vonni, hogy a körülöttünk levő tér euklideszi (azaz a háromszög szögeinek összege mindenhol 180^{o}), de kiderült, hogy az euklideszi és nem-euklideszi geometriák igazsága együtt áll vagy bukik: mindegyiket modellezni lehetett ugyanis a másikban. Azaz ha a nem-euklideszi ellentmondásos, akkor ez kiterjed az euklideszire is.

(Ezt ma inkább relatív konzisztenciának neveznénk, akkoriban azonban az ellentmondásmentesség és az igazság különbsége nem volt teljesen világos, hisz amióta elhalványult a különbség az *Elemek* axiómái és posztulátumai között, azóta a matematikai tételeket nem hipotetikusnak, hanem kétségtelenül igaznak tartották.[1] Így az igaz tételek azonosak voltak a bizonyíthatóakkal – ez, mint látni fogjuk, az euklideszi típusú elméletek sajátja. Igazság és levezethetőség akkor válik szét, ha egymást kizáró, alternatív logikai rendszerekben gondolkodhatunk, azaz különbségük tisztázását épp a nem-euklideszi geometriák elfogadása és a formális axiómarendszerek elméletének kidolgozása tette lehetővé.) Einstein relativitáselméletének kísérleti igazolódásával és a matematika formális eszményének kialakulásával az, hogy a minket körülvevő tér euklideszi vagy sem, a fizikai mérésektől vált függővé, azaz matematikai helyett egyértelműen fizikai problémává vált.

Lakatos számára ezért az euklideszi program lényege már nem is a térbeli összefüggések leírása, hanem valami egészen más, sokkal általánosabb (Lakatos 1977a: 4–5). A Lakatos által rekonstruált *„euklideszi program"* célja az ismeretek nyilvánvalóan igaz elvekből való levezetése. Az euklideszi elmélet – nem pusztán Eukleidész geometriáját, hanem minden hasonló mintára épülő elméletet értve rajta – olyan deduktív rendszer, melyben a tételek triviális volta az axiómák triviális igazságából következik. Az euklideszi elmélet tehát – ha az axiómák valóban ilyenek – csak nyilvánvalóan igaz állításokat tartalmaz, s ezért – úgy tűnik – joggal vívta ki a végleges igazságok megragadására törekvő tudósok csodálatát.

Az euklideszi program akkor kerül bajba, ha axiómáinak triviális igazságát mégis megkérdőjelezik. Az euklideszi geometria esetében[2] a párhuzamossági axióma volt az, amelyik nem tűnt annyira triviálisnak, mint a többi, noha sokáig mindenki biztos volt igazságában. Indirekt bizonyításokkal próbálkoztak, hátha sikerül levezetni a többiből. Sok furcsa jelenségre bukkantak (nem-euklideszi geometriai tételekre), de csak nem találtak (illetve csak találni véltek) ellentmondást. Bolyai és Lobacsevszkij érdeme éppen az volt, hogy felismerték: hiábavaló az axióma tagadásának cáfolatában reménykedni. Rendszereiket kidolgozva merték tagadni azt, amit korábban mindenki igaznak tartott.

Lakatos *Bizonyítások és cáfolatok* című munkája, többek közt, számos példát hoz olyan triviális igazságra, melyet a következő nemzedék matematikusai megkérdőjeleztek, sőt elvetettek. Az euklideszi típusú, triviális igazságokon alapuló elméletek ezért soha nem teljesen védettek a kritikával szemben.

---

1 Vö. Szabó Árpádra hivatkozva Lakatos (1981: 79. 2. lj., 80).

2 Az eredeti euklideszi geometria nem tökéletes példája a Lakatos által rekonstruált euklideszi elméletnek. Eredeti formájában ugyanis épp a fontos matematikai alaptételek nem axiómákként, hanem posztulátumokként voltak kimondva. Erre utal a *Bizonyítások és cáfolatok* egyik lábjegyzete is (Lakatos 1981: 79–80. 2. lj.). Az évszázadok során ennek jelentősége elveszett, ezért az európai matematika reneszánsza óta betöltött szerepe alapján Lakatos mégis némi joggal nevezte el róla e programot.

LEVEZETHETŐSÉG – A FORMÁLIS MATEMATIKA IDEÁLJA

Van a mai matematikának olyan vonása is, mely Eukleidész számára még nem létezett, és amely miatt ma egészen más fogalmunk van például a számról és a matematika természetéről: a képletek (formulák) használata, az algebrai és algoritmikus gondolkodásmód. Ma, ha matematizálásról beszélünk valamely tudományban, akkor az többnyire épp a mennyiségi összefüggéseket jellemző formulák használatát jelenti.

A modern matematika ezen elengedhetetlen jellemzői arab közvetítéssel az indiai helyiértékes számolásból erednek, ezért nem csoda, hogy sem Platón, sem Arisztotelész nem reflektált jelentőségükre. Még Kant sem, pedig ő már ilyennek ismerhette meg a matematikát, sőt, a formalizmus épp az ő idejében kezdett szert tenni igazi jelentőségére. Matematikus berkekben akkoriban formálódott programmá az a nézet, mely a végsőkig kiélezi a matematikai bizonyítás ama elvét, hogy nem használhatunk fel benne semmi egyebet, csak amit (a definíciókban és axiómákban) előzetesen kimondtunk, illetve amit (a korábbi tételekben) már bizonyítottunk.

Az európai matematika egyik nagy szintéziséből kialakuló matematikai analízis elbűvölő technikákat kínált ugyanis a változás jelenségeinek megragadásához, csak éppen nem kifejezetten egzakt eszközöket használt ehhez. Berkeley híres pamfletjében *(The Analyst)* szigorú bírálatát adja e módszernek, mely a számításokban szereplő végtelenül kicsiny mennyiségekkel bűvészkedik (meglehetős sikerrel!). Itt kezdődik a matematika alapjaira való rákérdezés, noha még csupán az újonnan kialakult kalkulus válik vitatottá. Ekkor még senki nem gondolja, hogy a probléma több, mint gyermekbetegség. Még egy évszázad telik el, és az olyan, újonnan kidolgozott területek, mint a halmazelmélet, a matematika egészét hozzák kétségbeejtő helyzetbe.

Az egyes geometriai (érintő- és terület-) számítások megkönnyítésére kialakuló eljárás bizonytalanságai, persze, a matematikusoknak is feltűntek. Láthatjuk, amint az euklideszi geometria *logikai* eszményét követve épp a geometriai *szemlélettől* igyekeztek megszabadulni: attól, hogy a bizonyításokhoz szükség legyen az ábrázolásra és a végtelenül kicsiny részekkel történő számításokhoz szükséges érzékre és tehetségre. (A matematikusok ugyanis ekkor már rég nem titkos művészetükre büszkék. Már nem a reneszánsz fejedelmi udvarokban divatos matematikai versenyeken mérik össze erejüket, ahol az alkalmazott eljárásokat célszerű volt még titokban tartani. És persze már nem is bonyolult egyenletek egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhető megoldásainak megtalálásáról van szó. Hogy egy tudománytörténeti pletykára hivatkozzam: mondják, hogy a francia forradalom idején a főiskolákra bekerülő gyengébb képzettségű fiatalok oktatásakor felmerülő problémák is a formális felfogás malmára hajtották a vizet – könnyebb szabályokat magoltatni, mint szemléletet alakítani.)

A módszerek egzaktságának eszméje az euklideszi geometria öröksége. Az új matematikában azonban az algebrai eszközök tisztábbnak bizonyultak. Akkor a legegyszerűbb egy probléma megoldása, ha képlettel rögzíthető szabály révén megadható a hozzá vezető út (mint például a másodfokú egyenlet megoldóképlete). Míg Eukleidész számára egy szám négyzete ténylegesen a hozzá tartozó négyzet területmértékét jelentette, addig az algebrai gondolkodásmódban ez már nem fontos. A Lagrange nevével fémjelezhető iskola eszménye: olyan formális rendszert alkotni, melynek – noha egyenesekről és görbékről, függvényekről és valós számokról, szám- és pontsorozatokról, érintőkről és görbe alatti területekről szól – megfogalmazásához mégse kelljen az ezekről alkotott képzeteinkre hivatkozni. Csak a puszta definíciókra és az axiómákra. A bizonyításoknak pedig szinte mechanikusan kellett levezetni a kérdéses tételt a lemmákból és feltételekből. (Ilyen axiomatikus rendszerrel a kedves olvasó feltehetőleg csak akkor találkozott, ha speciális matematikaképzésben vett részt, vagy egyetemen matematika szakot végzett.) A Kant által szintetikus *a priori*nak tekintett tudásból eltűnt az, ami miatt szintetikus lehetett: a szemléletre való hivatkozás. A folyamat azonban itt még nem állt meg.

Végső, tökéletes formáját a formális matematika ideálja akkor nyerte el, amikor nemcsak a geometriai intuícióra, hanem mindenfajta jelentésre történő hivatkozást száműztek. Lakatos rekonstrukciójában a történet így hangzik: a definíciókban fellépő végtelen regresszust (azt, hogy egy kifejezés definiálásához más kifejezésekre van szükség, s ezek definiálásához – a körben forgó definíciókat elkerülendő – megint újabbakra, és így tovább a végtelenségig) az euklideszi program úgy oldotta meg, hogy egyszerűen meghúzta a kérdezősködés és értetlenkedés határát ott, ahol feltételezése szerint a fogalmak jelentése minden érintett számára tökéletesen világos. (Eukleidész fent említett definíciójában például a „része" ilyen.)

A matematikatörténet tanúsága szerint azonban nagyon is könnyen előfordul, hogy kiderül az ilyen feltételezések önkényessége (Lakatos 1981). A *formalista program* ezért olyan tiszta bizonyításokat tűz ki célul, melyekben a többféle értelmezés lehetősége kizárt. Ők is húznak határvonalat, csak másfélét. Náluk a rendszer elején nem az alapokat rögzítő definíciók, posztulátumok és axiómák állnak, hanem csak axiómák, melyek lényegében a definiálatlan alapterminusok használatára vonatkozó szintaktikai szabályokat adják meg. A definíciók azért hiányoznak, mert definiálatlan alapterminusaik jelentéséről (szintaxis és szemantika megkülönböztetése – szemben a hétköznapi nyelvekkel – itt nagyon világosan értelmezhető) semmit nem akarnak előre rögzíteni. Ezeket mindenki tetszése szerint értheti vagy változtatgathatja, az mit sem ront a rendszer tökéletességén.

Egészen kifinomult formájában egy ilyen rendszer már nem is szavakkal beszél, hanem csakis és kizárólag formulákkal. Azt hiszem, nem túl vonzó a kívülálló számára. A halmazelmélet Zermelo Fraenkel-féle axiómarendszere például csak logikai jeleket és olyan definiálatlan alapterminusokat tartalmaz, mint „halmaz" és „eleme". Az előbbiek természetesen a logikára tartoznak, az utóbbiak viszont a halmazelmélet saját fogalmai. De arról, hogy mi is az a „halmaz", meg mi az „eleme", ez a rendszer semmit nem árul el. S a halmazelméletről nem is tud meg semmit az, aki csak ezeket a formális axiómákat ismeri, noha lehet azt is mondani, hogy logikailag ebben már minden benne van.

Megcsúfolása ez mindannak, amit Platón mondott a matematikáról, a név, a definíció, az alakzat és a belátás egységéről. Ez a matematika már nem a létező megismeréséhez akar elvezetni. Tárgya sokkal inkább a logikailag lehetséges. Az elmélet ugyanis ebben a formájában már nem szól semmiről. A jelentést – hogy Lakatos kissé túlságosan is expresszív kifejezését használjam – kívülről fecskendezik a rendszerbe. Amikor az axiomatikus rendszer egy modelljéről beszélünk, akkor e modellben jelentést adunk a definiálatlan alapterminusoknak, s ha ezzel az axiómák teljesülnek, akkor egy „valamirevaló" axiómarendszer esetében (a valamirevalóság feltételeit Gödel teljességi tétele adja meg) e modellen minden további levezetett tétel is igaz lesz.

A formális elmélet értelmét az adja, hogy van modellje, azaz hogy szól*hat* valamiről. A kristálytiszta logikájú matematikai rendszer tökéletesen átlátszó és kikezdhetetlen gyémántja a mai tudomány csúcsteljesítménye. A matematika formalista programjának célja tehát a tudás ilyen, tisztán formális rendszerekbe öntése.

A matematika *formalista program*ja azonban azonosítja a matematikát annak formalizált ideáljával. Lakatos ez ellen a matematikafelfogás ellen lép fel cikkeiben. Hogy miért van erre szükség, azt legpontosabban talán a Lakatos-tanítvány Reuben Hersh fogalmazta meg az „ideális matematikusról" szóló írásában.

Az alkotó matematikus filozófiai helyzete

Mivel a matematikusok különbözőek, csak ideáltípusról beszélhetünk. Egy „leginkább matematikus jellegű matematikus" – aki persze csak „elképzelhetetlenül tiszta mintapéldány" – tényleges tevékenysége éles ellentétben áll azzal, ahogy ő látja saját magát. Hősünk „úgy tekint művére, mint a világ valódi szerkezetének részére, amely az idők kezdete óta fennálló örökérvényű igazságokat tartalmaz” (Davis–Hersh 1984: 59). Tegyük fel, hogy a nem-Riemann hipernégyzetek elméletével foglalkozik:

> Neki és kollégáinak semmi kétségük sincs afelől, hogy a nem-Riemann hipernégyzetek éppoly határozottan és objektíve léteznek, mint a gibraltári szirt, vagy a Halley-üstökös. Sőt, egyik legfőbb eredményük, hogy a nem-Riemann hipernégyzetek létezését bebizonyították, míg a gibraltári szirt létezése, bár felettébb valószínű, de nincsen egzaktul bebizonyítva (Davis–Hersh 1984: 60).

Ám ha egy diák arról kérdezősködik ideális matematikusunknál, *mi* is valójában a bizonyítás, Tarskira, Russellre vagy Peanóra hivatkozik:

> Először is le kell írni az elmélet axiómáit egy formális nyelven egy adott szimbólumrendszerben vagy ábécében. Ezután le kell írni a tétel feltételeit ugyanebben a szimbólumrendszerben. Ezután pedig meg kell mutatni, hogy a feltételek a logikai szabályok alkalmazásával lépésről lépésre addig alakíthatók, míg a végkövetkeztetéshez jutunk (Davis–Hersh 1984: 64).

Ám e pontos leírás után el kell ismernie, hogy „valójában soha senki nem *csinálja* ezt”, a formális nyelvekről és a formális logikáról pedig nemhogy nem kell mindent tudni ahhoz, hogy valaki bebizonyíthasson valamit, hanem épp ellenkezőleg: „Minél kevesebbet tud róla, annál jobb. Az csupa értelmetlenül absztrakt dolog” (Davis–Hersh 1984: 64). Amikor pedig egy olyan filozófussal kerül szembe, aki reggelenként Occam borotvájával áll a fürdőszobatükör elé, így védekezik:

> Sohasem gondoltam, hogy a hipernégyzetek léteznek. Amikor ezt mondom, mindössze azt értem ezen, hogy a hipernégyzetek axiómáinak van modellje. Más szóval egyetlen formális ellentmondás sem vezethető le belőlük, és így, amint azt a matematikában szokás, módunkban áll posztulálni létezésüket. Valójában az egész dolog nem jelent semmit, ez csak egy játék, mint a sakk, amit axiómákkal és következtetési szabályokkal játszunk (Davis–Hersh 1984: 65).

Jómagam laikus testvér lévén inkább azokra hivatkozom, akik maguk is alkotó matematikusok. Davis és Hersh ezt írják:

> A legtöbb író, aki ezzel a témával foglalkozik, egyetért abban, hogy a tipikus alkotó matematikus a hétköznapokon platonista, az ünnepnapokon formalista. Más szóval, amikor matematizál, akkor meg van győződve arról, hogy egy objektív realitással foglalkozik, és arra törekszik, hogy meghatározza ennek tulajdonságait. Amikor azonban arra kérik fel, hogy összegezze ennek a realitásnak a filozófiáját, akkor legkönnyebbnek azt a színlelést találja, hogy végül is mégsem hisz benne (Davis–Hersh 1984: 338).

Tymoczko hasonlóan frusztráló élményekről számol be, melyekből egyértelműen látszik, hogy a matematika alapjainak „hagyományos filozófiai megközelítései képtelenek a tényleges matematikai tapasztalat megragadására” (Tymoczko 1986: IX). Ezek az élmények Lakatos számára is átélhetőek voltak. Filozófiájának megszületésében nem kis része volt éppen ezen irányzatok – különösen a közöttük legbefolyásosabb formalizmus – elégtelenségének. Matematikai tárgyú írásainak mindegyikére illenének a *Bizonyítások és cáfolatok*hoz írott bevezetőjének sorai: „vitatja a matematikai formalizmust, de a matematikai dogmatizmus végső állásait nem támadja” (Lakatos 1981: 19).

Áttekintve immár azt a problémahorizontot, melyben Lakatos filozófiája megszületett, lássuk, milyen kérdéseket vet fel műveiben!

„Mit bizonyít egy matematikai bizonyítás?”

A matematikafilozófia 20. századi iskolái – a formalizmus, a logicizmus és az intuicionizmus, melyek közül itt csak az elsőt tárgyaltuk részletesebben – kizárólag eszményi értelemben beszéltek a bizonyításról. Eszményeiket azonban az őket megelőző matematika története ritkán elégíti ki: az „előtörténet” számukra homályos fogalmakkal végzett, nem kellően szigorú bizonyításoktól hemzseg. Lakatos figyelme éppen ezek felé a nem teljesen formalizált, mai értelemben nem teljesen szigorú bizonyítások felé fordul. A formális bizonyítások mellett megkülönböztet kétféle informális bizonyítást is (Lakatos 1977b).

A *preformális bizonyítás* olyan elméleti környezetben születik meg, mely csak részben formalizált. A gondolatmenetek a matematika hétköznapi nyelvén vannak megfogalmazva, formulát csak ott használnak, ahol az lényeges rövidítést jelent, vagy megkönnyíti a megértést. A fogalmak egy részéről egyszerűen feltételezik, hogy mindenki ugyanúgy érti azokat (másfél évtizednyi matematikatanulás után ez már nem teljesen alaptalan). Ebből persze már látszik e gondolatmenetek esendősége. Előfordulhat, hogy valaki mégsem azonos módon érti a szavakat. Az ő fogalmi keretében hamis lehet az a tétel, mely mások fogalmi keretében igaz. A viták ezen a ponton végeláthatatlanok. Megegyezhetnek ugyanis a kérdéses terminus jelentésében, ám ehhez feltehetőleg olyan szavakat is használtak, melyek jelentésében külön nem egyeztek meg, mert még egyértelműnek tűntek.

A *posztformális* bizonyítások egy része a formális matematikai elméletek ékköveit hivatott esendő tudásunkba ágyazni. Ha ugyanis van egy formális rendszerünk, melyben legalább számolni tudunk, akkor – Gödel nemteljességi tétele értelmében – megfogalmazható a rendszer fogalmaival olyan állítás, melynek sem igazsága, sem hamissága nem vezethető le az axiómákból. Azaz tudunk olyat kérdezni, amire axiómarendszerünk adott formájában nem válaszol. Ez persze nyújthatja a végtelen szabadság érzetét is, ám ha, mondjuk – próbálgatja Lakatos –, kiderülne, hogy a Fermat-tétel a számelmélet Peano axiómarendszerében *eldönthetetlen,* ugyanakkor *igazsága* mégis érdekelne bennünket a számelmélet standard modelljén, akkor informális érveléshez folyamodhatnánk. Ez persze – mint minden informális bizonyítás – ki lesz téve a cáfolat lehetőségének.

Az informális bizonyítások tehát óhatatlanul cáfolhatóak, azaz – szigorú értelemben véve – nem bizonyítanak. De akkor mire valóak? Erre ad választ Lakatos legkitűnőbb munkája, a

Bizonyítások és cáfolatok

A heurisztikai megközelítés

Lakatos matematikafilozófiája – enyhe iróniával – olyan bizonyításokra hivatkozik szívesen (Lakatos 1977b, 1981), melyek első pillantásra meggyőzőek, ám a közelebbi vizsgálódás felfedi hiányosságaikat: hamis előfeltevéseken alapultak, vagy a levezetés helyes, csak éppen nem a kérdéses tételt bizonyítja. Értéktelenek volnának ezek a bizonyítások? Ha történeti forrásokban találkozunk ilyenekkel, tulajdonítsuk ezeket a kor tudatlanságának vagy a szerző figyelmetlenségének? S ha saját bizonyításunkban fedezünk fel hibát, hajítsuk a szemétkosárba?

> *Engem a bizonyítások akkor is érdekelnek, ha nem érik el kitűzött céljukat. Kolumbusz ugyan nem jutott el Indiába, de azért egészen érdekes dolgot fedezett fel* (Lakatos 1981: 32).

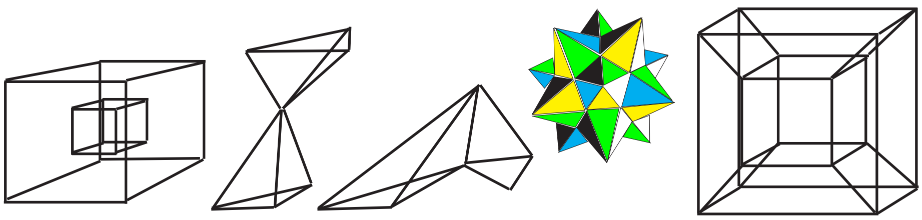
Kolumbusz esetében ebben nem kételkedünk, ám mire jó egy rossz bizonyítás? Mi lehet még értékes benne, ha már tudjuk, hogy nem bizonyít?

Hogy erről mondhassunk valamit, ahhoz utalni kell pár szóval Lakatos egyik mesterére, Pólya Györgyre, aki heurisztikai munkáival újraélesztette a felfedezés művészete (vagy logikája?) iránti érdeklődést. A módszerről hallva a bölcsészek feltehetőleg Descartes-ra gondolnak. Nem alaptalanul. Descartes *Értekezés*e az értelem vezetésének módszeréről nem kis részben a matematikai értelem vezetésének gyakorlatát követi, azt foglalja szabályokba, azaz olyan módszert vesz át, amely ott már ismert. Pólya olyan szabályokra utal, melyeket a tehetséges matematikusok öntudatlanul is követnek, amikor matematikai problémákat oldanak meg. Lakatos viszont módszertani újítások jelentőségét fedezi fel a matematikatörténetben: a bizonyításelemzés Seidel által felfedezett módszere a *Bizonyítások és cáfolatok* egyik legfontosabb gondolati vezérfonalát adja.

Pólya Lakatos által nagyra becsült heurisztikája, *A gondolkodás iskolája,* olyan pontosan definiált feladatokat segít megoldani a diákoknak, melyekről tudható, hogy akik kitalálták őket, azok már tudják a megoldást. Bizonyítási feladatai olyan korrektül megfogalmazott tételekre vonatkoznak, melyeknél lehet tudni, hogy ha valamely feltételt nem használtunk fel a bizonyításban, akkor valószínűleg nem vagyunk még készen. Lakatos szabályai ezzel szemben az ismeretlen felfedezésére vonatkoznak. A bizonyítási probléma egyben a tétel pontos megfogalmazásának problémája is. Azokat a matematikai tételeket lehet velük megtalálni, melyek, ha már elkészültek, Pólya diákjai számára is feladattá válhatnak.

Lakatos és Pólya heurisztikája tehát kiegészíti egymást. Lakatosé a naiv sejtéstől vezet el minket a kidolgozott tételig. Módszertani szabályai ennek megfelelően elég meglepőek. Például: *„Ha van egy sejtésed, kezdd el bizonyítani és cáfolni!”* Legtöbbünk számára nem könnyű egyszerre bizonyítékokat és ellenpéldákat is keresni. Hajlamosak vagyunk beleragadni egyik vagy másik szerepkörbe, s nehezen értjük meg, ha valaki egy szerintünk hamis tételt bizonygat hosszan, vagy ha szerintünk világosan látható igazságban kételkedik. A *Bizonyítások és cáfolatok* nem véletlenül tandráma. Szórakoztató gyűjteménye mindazoknak a szerepeknek, melyeket a tudósok kedvenc elméleteik védelmében vagy általuk lenézett álokoskodások bírálatakor magukra öltenek. S mivel egy színművet nem lehet pár mondatban elmesélni, nem is próbálkozom vele. Csupán felvetek néhány filozófiai problémát, melyek fontosak Lakatos számára.

A könyv lapjain zajló parázs vita egy egyszerű matematikai tétel igazsága körül forog, ám pillanatokon belül kérdésessé válik számos más igazság is, miközben bizonytalanná válnak olyan szavak jelentései, melyekről a vita kezdetén mindenki feltételezte, hogy egyértelműek, mint például a „poliéder”, „lap”, „él” stb. A poliéderekre vonatkozó tétel cáfolói olyan ellenpéldákat hoznak fel, melyek aligha nevezhetők józan ésszel poliédernek, ám megfelelnek a vita egyes pontjain adott definícióknak. S minden újabb ellenpélda új, azt kivédő definícióra készteti a tétel védelmezőit.



A tétel fogalmi kerete a szemünk előtt válik kérdésessé, és válik a különböző teoretikus megoldások egyre gazdagabb hátterében egyszerű elemi matematikai összefüggésből a tudomány történeti megközelítése és filozófiája számára is érdekes és izgalmas jelenséggé. A matematika történeti esetlegességei hirtelen izgalmassá válnak – ami persze kevéssé lelkesíti a matematikusokat. De itt már nem pusztán a tétel igazsága vagy a bizonyítás helyessége a tét. A matematika történetisége (vagy örökkévaló, történet nélküli igazsága) az, ami kockán forog.

Történelem a lábjegyzetekben

A történeti tudatára valamit is adó olvasónak, persze, égnek áll a haja attól, ahogy Lakatos egy terembe hozza össze vitára minden korok matematikusainak nézeteit. A tanteremben zajló dialógus a valóságos történet racionális rekonstrukciója. A valóságos történet ezalatt a lábjegyzetekben zajlik. Itt kapnak helyet a források, ahonnan a vita szereplőinek nézetei származnak. Sőt, számos más történeti részlet is napvilágra kerül, úgyhogy a végén az ember már tényleg nem is tudja, hogy a teremben zajló vita és a matematikusok eredeti nézetei közül melyik karikatúrája a másiknak. Mindez jócskán igénybe veszi a megdöbbent olvasó figyelmét, aki próbál ingázni a szöveg és a lábjegyzetek között, hogy a vita fonalát se veszítse el, de azért az igazi történet poénjairól se maradjon le.

Szellemessége ellenére merőben anakronisztikus, és történeti érzékünket sérti az is, ahogy a modern szigorúsági követelményekkel felvértezett olvasó kénytelen Cauchyt kihívni párbajra, amikor Lakatos mellékesen megjegyzi, hogy amit korábban – Cauchyt követve – bizonyításként előadott, az valójában csak ellenőrzése a tételnek, s ekképpen nem bizonyít semmit (Lakatos 1981: 116). Meglepődünk azon, hogy nem vette ezt észre Cauchy? (Persze, mi magunk sem vettük észre, de valahogy az ellenőrzés logikai szálain visszafelé haladva úgy éreztük, egyszerűen eljuthatunk a tételhez.)

Elképedünk, milyen szenvedéllyel tudnak matematikusok teljesen absztrakt, életidegen tárgyukról beszélni: „Borzalommal fordulok el ettől a siralmas dögvésztől: függvények, amelyeknek nincsenek deriváltjaik!" (Lakatos 1981: 40. 1. lj.) Eközben a főszövegben egyes szereplők váratlan pálfordulásának lehetünk tanúi, van, aki sértődötten elhagyja a termet, egy hölgy pedig „historizmust" kiáltva elájul a vita tetőpontján.

Lábjegyzetből tudjuk meg, hogy az egyszerűnek látszó gondolatmenet, mellyel megismerkedtünk, nem várt lehetőségeket rejteget: Cauchy bizonyításában sehol nem használta fel, hogy a poliéder élei egyenesek és lapjai síkok, tehát a bizonyítás elvégezhető görbe lapú és görbe élű poliéderekre is (Lakatos 1981: 135. 1. lj.). Azaz hirtelen elénk áll egy tétel, melyről mindeddig beszéltünk, állításokat tettünk, ellenőriztük, bizonyítottuk, és még csak nem is tudtunk a létezéséről. Mert nem gondoltunk rá. Görbe lapú, görbe élű testeket nem tartottunk volna poliédereknek. Nem is gondoltuk a tárgyhoz tartozónak effélekről gondolkodni. Most pedig kiderül, hogy elméletünk szól róluk, s ezzel már születésük pillanatában az elmélet érvényességi köréhez tartoznak. Mi jöhet még?

Nos, Lakatos nem nyugtat meg. Ha mástól nem, Poppertől már megtanulhattuk, hogy a tudományos elméletek nem igazolhatóak; Popper szerint tudományosságukat az biztosítja, hogy cáfolhatóak. Őt követve Lakatos – immár metafizika helyett a formális és informális matematika különbségére utalva – így fogalmaz: „Az üres fecsegés cáfolhatatlan, a tartalmas állítások fogalomkitágítással megcáfolhatóak" (Lakatos 1981: 153). Azaz bármi jöhet.

A matematikának, ha meg akarja őrizni végleges és cáfolhatatlan igazságokkal hajdan elnyert királynői státusát, formálissá kell válnia. Azaz puszta eszközzé, mely már nem a valóságról szól. Formális elméletünknek találhatunk modellt egy másikban, s ez mély matematikai belátásokhoz vezethet, ám pusztán formális rendszereket alkotva és egymásra vonatkoztatva soha sem jutunk ki az üvegpalotából. A birodalom, melyen a formális matematika uralkodik, saját formális struktúráiból épül. A valóságra kíváncsi kutatók számára ez a matematika puszta eszköz. Pontos képet ad tételek összefüggéseiről, ám semmi többről. A matematikusok persze úgy érezhetik, az egész világ benne van e kristálygömbben. Ők – mint ez Lakatos lábjegyzeteiből is kiderül – mégsem életidegen, hideg és halott világnak érzik tudományuk birodalmát. S ezen a ponton újra előtérbe kerülnek az alkotó matematikus filozófiai helyzetére vonatkozó dilemmák.

A matematikai tapasztalat szerepe

Lakatos egy előadásában (1967) az empirista (és induktivista) felfogás reneszánszáról beszél. Kiváló matematikusokat idéz, akiknek sora az ő számára a legjobb érv a matematika bármely filozófiája mellett vagy ellen. Az előadásban maguk a matematikusok szólnak a matematikai *tények* jelentőségéről az axiómák igazságának megítélésében (Russell), az abszolút bizonyosság lehetetlenségéről (Carnap) vagy legalábbis meglehetősen kétséges voltáról (Curry), a természettudományból származó adatok szerepéről (Quine, Mostovski), arról, hogy a számelmélet elméleti alapját jelentő halmazelmélet kevésbé biztos, mint maga a számelmélet (Quine), illetve hogy a szerepe inkább a számelmélet magyarázata, semmint megalapozása (Gödel). Arról is szólnak, hogy a matematikai elméletek esendőek (Gödel), hogy igazságuk csak valószínű (Church), hogy az axiómákat sokszor nem saját maguk, hanem következményeik igazsága teszi elfogadottá (Fraenkel, Gödel). Az empirizmus legtisztább megfogalmazása e sorok közt a matematikát egy valóságos világ elméleti konstrukciójának tekinti (Weyl). Hipotetikus voltában a fizikához hasonlítják (Russell, Carnap, Weyl, Neumann, Bernays), sőt azt is megfogalmazzák, hogy a matematika igazolása – éppúgy, mint más tudományoké – gyakorlati (Kalmár) (Lakatos 1967: 25–28).

Az *Infinite Regress and the Foundation of Mathematics* című cikkében (Lakatos 1977a: 5–9) így jellemezte e filozófiai megközelítéseket:

Az *empirista* elmélet a megfigyelésekről szóló állítások igazságán alapul. E tapasztalati igazságok azonban nem biztosítják azoknak a hipotéziseknek az igazságát, melyek feladata – axiómákként – e megfigyelt tények magyarázata. A következmények igazsága csupán megerősítés, de nem igazolás. Ha azonban e magyarázó elvekből levezetett állításokról kiderül, hogy empirikusan hamisak, az egyben megcáfolja a hipotéziseket (ill. ezek némelyikét) is, s ezzel bukik az egész rendszer. Az empirista elmélet tehát vagy hipotetikus (azaz eddig még meg nem cáfolt), vagy hamis.

Ennek kiküszöbölésére, az empirikus tudás megmentésére született meg az *induktivista* program. Ez az empirikus tapasztalatokból levont induktív általánosítás útján akart eljutni az általános elvek igazságához, hogy az a logikai levezetés csatornáin így ismét eláraszthassa az egész rendszert. A induktív logika tehát a deduktív logika párja lett volna, mely biztosíthatta volna az empirista elméletek tiszteletre méltó voltát. Lakatos azonban Popper egyik legfőbb érdemének tartotta, hogy kimutatta az induktív logika érvénytelenségét. A tudás alapjainak léte vagy nemléte tehát az euklideszi és az empirista program viadalában dől el.

Összehasonlítva ezt a korábban jellemzett euklideszi programmal, azt mondhatjuk: *az euklideszi elmélet alapja elméleti;* axiómáinak igazsága legfeljebb további elméleti megalapozással biztosítható. Ilyen változás volt a görög matematikában, amikor a (pythagoreus) számelmélet helyett az (euklideszi) geometria lett az uralkodó elmélet (Lakatos 1981: 181. 1. lj.). Így lett az analízis alapja a számelmélet, majd annak az alapja a halmazelmélet, és ennek alapja Russell szándéka szerint a logika (Lakatos 1977a: 2–19). S így láthatta a formalista program a triviális (azaz euklideszi) metamatematikában a végleges igazság elérésének biztosítékát (Lakatos 1977a: 20–22).

Az empirista elmélet alapja ezzel szemben *tapasztalati.* Kérdés persze, hogy milyen értelemben lehetne a matematikában empirizmusról beszélni. Nyilván nem arról van szó, hogy a körülöttünk látható világ tényeiben fedezzük fel és igazoljuk a matematika összefüggéseit. (A matematika már vagy két és félezer éve nem ezekkel a dolgokkal foglalkozik.) Ha egy háromszögről bizonyítunk valamit – emlékszünk Platón szavaira –, akkor nem a homokba rajzolt háromszögről beszélünk. A matematika világa túl van mindazon, ami érzékeinkkel felfogható. Ha vannak tényei, akkor azok valamiféle „ideális" világ tényei, mely csupán elgondolható, de nem látható vagy tapintható.

Miért nem nevezi ezt Lakatos platonizmusnak? Miért van több köze az empíriához? Nos, Lakatos nem is azt mondja, hogy az informális matematika empirikus, hanem hogy *kváziempirikus* (különbséget tesz empirikus és empirista elmélet között). Az igazi empirizmustól ezt épp a matematika világának intelligibilis volta különbözteti meg. A platonizmustól viszont az, hogy tárgyai és tényei nem örökkévalóak. Felfedezhetünk benne eddig ismeretlen dolgokat, de ki is találhatunk ilyeneket (például egészen bizarr poliédereket, melyekre korábban senki nem gondolt), mások pedig a feledés homályába veszhetnek (ahogy ezek közül is néhányat csak a történetkutatás fedezett fel újra). A matematika formális rendszerbe merevített változatát ezek persze már nem érintik (ez erénye és hibája egyszerre), ám nagyon is érintik az informális (empirista, euklideszi…) matematikát.

Lakatos említett cikkében – az euklideszi, az empirista és az induktivista program mellett negyedikként – külön kiemeli az ismeretelméletben felfogása szerint új fejezetet nyitó popperi elméletet. A *kritikai* (vagy fallibilista) *program* elfogadja az empirista elméletek esendőségét. Megszabadít az elméletek igazságának dogmatikus felfogásától, hiszen elve éppen az, hogy minden tudásunk csak átmeneti, sejtésszerű, hipotetikus. „Soha nem tudunk, csak találgatunk."

A cáfolhatóság elvének általános elfogadása miatt a matematika „alapjainak" kutatása – ha ezen a matematikai igazság és jelentés elméleti megalapozására irányuló törekvést értjük – eleve kudarcra ítéltetett. Az igazság és a jelentés csak továbbítható a definíciók és a bizonyítások révén. Ám mivel nincs kétségtelenül igaz tétel és mindörökre tökéletesen ismert terminus, a tudás nem alapozható örökre tökéletesen ismert terminusokkal megfogalmazott abszolút biztos axiómákra. Örökérvényű alapok nincsenek.

Az alapok helyett Lakatos inkább uralkodó elméletekről beszél, melyeket elég megalapozottnak (vagy biztosnak) tekintenek ahhoz, hogy más területek problémáit nyugodt szívvel lefordíthassák az ő nyelvére. Ilyen fordítás eredményei például a számelméleti tételek az euklideszi geometriában (s ilyen fordítást jelent, valahányszor egy problémát egy ismert terület összefüggéseit felhasználva próbálunk megoldani – például modellezünk). Az uralkodó elmélet – a kuhni paradigmához hasonlóan – egy adott történeti időszakban uralja az adott kutatási területet, sőt, más jellegű vizsgálódásoknak is példaképül szolgál. A tüzetesebb matematikatörténeti vizsgálódás feltárja itt a paradigma fogalmának alkalmazhatóságát is. A kuhni felfogással szemben azonban Lakatos szigorúan csak elméletről beszél. De még így is megbolygatja a történetiség kérdését, s azt a kérdéskört, amelyet leginkább hermeneutikai problémának nevezhetnénk.

Az, hogy az uralkodó elméletek éppúgy változnak az idők során, mint a szigorúság általánosan elfogadott standardjai, az önmagában még nem lenne igazi probléma. Lakatos azonban három lényeges kérdéskört is feltár itt.

A tudományos nyelv változása

Közkeletű tudománytörténeti felfogás, hogy a tudományok fejlődésével a korábban „homályos" fogalmak „tisztázódnak", egyre pontosabban definiálják őket, s lassanként a világosság és egzaktság váltja fel a kezdeti sötétben tapogatózást. Ha ez igaz, akkor a bizonyításokból származó, elméleti fogalmak tisztázzák a naiv fogalmak pontatlanságát – a bizonyítások és cáfolatok módszerével tehát eloszlathatjuk a fogalmainkat körülvevő homályt. Valóban így van ez? Lakatos szerint nem. Bár az elméletből származó fogalmak valóban világosabbak, jobban körülhatároltak, mint amilyenek a naiv fogalmak voltak, ám ennek a naiv jelentés eltűnése az ára.

A naiv fogalom eredetileg definiálatlan. Nincs szükség definícióra, mert úgy tűnik, mindenki számára világos, miről van szó. Definiálása csak akkor válik szükségessé, amikor támadások érik a segítségével megfogalmazott állítás(oka)t. Az ennek hatására születő védekező típusú (például „torzszülött-kizáró") definíciók azonban még általános elfogadásuk esetén is csak pillanatnyi megnyugvást eredményeznek. Nincs olyan definíció, melynek segítségével egyértelművé lehetne tenni egy fogalmat – a definíciók végtelen regresszusát nem lehet megállítani. Így mindig lehet a definíción belül maradva úgy értelmezni a fogalmat, hogy az értelmezésünknek megfelelő ellenpéldával megcáfolhassuk a kiszemelt tételt (erre idéz számos példát a *Bizonyítások és cáfolatok*). A történelem szereplői számára a kritika elfogadása intellektuális tisztesség dolgának tűnik. E lépés – úgy láthatják – a fogalom rejtett, eddig fel nem fedezett aspektusát tárja fel. Azaz a szemük előtt rejtve marad az, amit a történeti visszapillantás fényében, történeti érzékünkkel felvértezve mi már észrevehetünk: hogy a bizarr ellenpéldák *tágították ki* azt az univerzumot, amelyen belül a definíció még jó lehetett. A megváltozott világban ugyanaz a definíció már mást jelent, ezért az eredeti határok visszaállítása végett kellett látszólag *szűkíteni* a definíciót.

A tudomány fejlődésében igazán lényeges szerepet játszó mozgás azonban nem ez, hanem az elméleti fogalmak születése. Amikor a *Bizonyítások és cáfolatok*ban az Euler-tétel igazságáról folyik a vita, kapunk rá bizonyítást, de találunk ellenpéldákat is. A sajátos helyzet nyomán meginduló bizonyításelemzés (Lakatos 1981: 23–71) feltárja a bizonyítás azon pontjait, melyek megbuknak az ellenpéldán. Ezek vagy hamis segédtételek, vagy olyan rejtett lemmák, melyek igazságát eleve feltételeztük, anélkül, hogy kimondtuk volna. Ha ármost ezeket a lemmákat feltétellé alakítva beépítjük a tételbe (Lakatos 1981: 50–71), akkor tételünk elég hosszú lesz. E beépített feltételeket azonban külön meghatározásokként ki is emelhetjük a tétel elé, és akkor már elég csak egy szóval utalnunk azokra a dolgokra, melyekre a feltételünk teljesül: így születnek a bizonyításból (avagy elméletből) származó fogalmak. Ezek elméletet, de legalábbis (bizonyított) tételt hordoznunk a hátukon, s ez adja intellektuális súlyukat. „Semmi esetre sem nevezném a bálnát halnak, a rádiót hangos doboznak (ahogy a primitív népek teszik), és nem idegesít, ha egy fizikus az üvegről mint folyadékról beszél. A haladás folyamán valóban *elméleti osztályozás,* azaz elméletből (bizonyításból, vagy ha úgy tetszik, magyarázatból) származó osztályozás váltja fel a *naiv osztályozást*" – mondja a vita egyik szereplője a műben (Lakatos 1981: 137).

A fogalomkitágítás lehetősége azonban összezavarja az addig kidolgozott elméleteket. Ennek végső konzekvenciáit is levonták a matematikusok, amikor elfogadták a korlátlan fogalomkitágítás lehetőségét s – hogy az ebből eredő bizonytalanságokat elkerüljék – a formális deduktív rendszer ideálját. Ez alapvetően megváltoztatta a matematika fejlődési sémáit (Lakatos 1981: 156).

Az elméleti és a naiv fogalomkitágítást egyaránt a kritika serkenti, s ezzel a vita a tudományos haladás alapvető mozgatórugójává válik. A tudományos nyelvnek a haladással együtt járó változása azt eredményezi, hogy a tudósok olykor félreértik egymást. De ne ítéljünk túl szigorúan. Lakatos szerint elhibázott az a nézet, mely a racionális vita előfeltételévé szeretné tenni, hogy a résztvevők – a zűrzavart elkerülendő – *előre* definiálják fogalmaikat. Nem a fellépő végtelen regresszus problémája miatt, hanem mert Lakatos épp azt mutatja fel a matematikában, hogy a fogalomalkotás nem autonóm: az értelmes definíciók épp a vitából születnek meg.

A deduktivista és a heurisztikai megközelítés ellentéte

„A deduktivista és a heurisztikai megközelítés ellentéte" című függelék a *Bizonyítások és cáfolatok*ban (doktori disszertációjának egy fejezete) hangsúlyozza, hogy egy fogalom meghatározása ahhoz a problémahelyzethez tartozik, melynek megoldására született. Ha ezt leválasztjuk róla, elveszíti értelemadó hátterét. Lakatos ezért a matematikaoktatás szégyenének tartja, hogy „a tanulók képesek pontosan idézni a Cauchy-, Riemann-, Lebesgue- stb. integrálok különböző definícióit anélkül, hogy tudnák, milyen problémák megoldására alkották meg, vagy milyen problémák megoldása során fedezték fel ezeket" (Lakatos 1981: 178. 1. lj.).

A matematika szokásos, deduktív felépítése a logikai összefüggések felmutatására helyezi a hangsúlyt. Az euklideszi időkben kialakult rendszerezés pedáns és szigorú. Az adott tudományterülettel éppen csak ismerkedő diák számára sokszor fogalmi bűvészkedésnek tűnik, amit a matematikusok művelnek. A deduktivista stílus a bizonyításból származó fogalmat a bizonyítás *előtt* definiálja, a tételt tökéletes, kész formájában mutatja be, „takargatja az erőfeszítést, és eltitkolja a kockázatot. Az egész történet szertefoszlik, a tételnek a bizonyítási eljárás folyamán egymást követő kísérleti megfogalmazásai felejtésre ítéltetnek, a végeredmény pedig szent tévedhetetlenséggé magasztosul" (Lakatos 1981: 208).

A matematikai felfedezés nem a deduktív logikát követi. Lakatos azonban ebből nem arra következtet, hogy akkor nem is racionális. A bizonyítások és cáfolatok módszere éppúgy módszer, ahogy Descartes-é. Bemutat egy valóban ésszerű lépésekből álló, bár kétségtelenül sokágú és bonyolult gondolatmenetet. A folyamat tanulságait szabályokban összegzi.

„A matematikai felfedezés logikája" – mondja az alcím. A heurisztikai stílus a Popper által is emlegetett szituacionális logikát mutatja fel: a matematikai eredmények mögött mindig felmutatja azokat a problémahelyzeteket, amelyek megoldására megszülettek. Különösen fontos tehát az a rész, mely a jelenlegi matematika általános gyakorlatához közelebb áll, mint a korábbi (s döntően a 19. század előtti állapotokat jellemző) informális érvelések. A John Worrall és Elie Zahar által szerkesztett kiadás (ebből készült a magyar fordítás is) II. fejezetében az elemi matematikai összefüggésként fellépő Euler-tételt a dialógus egyik szereplője egy jól kidolgozott, axiomatikusan felépített elmélet segítségével bizonyítja. Az eredeti tétel fogalmait a vektorterek elméletének nyelvére fordítja le.

A fordítás problémája

Az eredeti fogalmi keret, melyben egy probléma megfogalmazódott, különbözik attól, amiben a megoldást keressük. Választ keresünk egy kérdésre, s egy új terület váratlanul ígéretes alternatívát kínál a probléma megfogalmazásához. Matematikusok számára a kérdés így vetődhet fel: el lehet-e dönteni formalizálással egy nem formális bizonyítás érvényességét? Tudománytörténészek számára ugyanez: eldönthető-e egy gondolat helyessége vagy egy gondolatmenet érvényessége, ha saját mai tudásunk nyelvére fordítjuk le? Lakatos szerint a válasz: nem, mivel távolról sem egyértelmű, miként kell a fordítást elvégezni.

A formalizálás éppúgy, mint sokszor a fordítás, a gondolatmenet alapos átdolgozása. Függ attól az elmélettől, amelybe fordítunk s a kérdéses problémától is. Így az adott szövegnek tudományos értelmüket illetően is különböző fordításai s különböző formalizálásai lehetségesek: beszélhetünk igazoló és cáfoló fordításról, igazoló és cáfoló interpretációról. Azaz bármi derül is ki a fordítás vagy formalizálás során, az nem jár semmilyen következménnyel az eredeti érvelésre nézve. Lehet, hogy megcáfolja, de az is lehet, hogy csak egy (félrevezető módon) cáfoló fordítással van dolgunk. „A fordítási eljárások problémák roppant tárházai… általában meggyorsítják mind az uralkodó, mind a beolvasztott elmélet fejlődését, de később, amint a fordítás gyenge pontjai előtérbe kerülnek, a fordítás a további fejlődés gátjává válik” (Lakatos 1981: 182. 1. lj.). Ezek a *Bizonyítások és cáfolatok* utolsó mondatai. Sajnos, Lakatos soha nem dolgozta ki a matematikatörténet ilyen felfogását, nem tárta fel e paradigmákat vagy gondolkodási sémákat. A modern, 20. századi matematika filozófiai megközelítése pedig épp ezt tenné elengedhetetlenné.

Hivatkozott irodalom

Davis, Philip J.–Reuben Hersh (1984 [1981]): *A matematika élménye.* Ford.: Székely J. Gábor. Budapest: Műszaki. (Eredeti: *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhauser.)

Euklidész (1983): *Elemek.* Budapest: Gondolat.

Lakatos, Imre (1967): A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics? In *Problems in the Philosophy of Mathematics.* (Proceedings.) Imre Lakatos szerk. Amsterdam: North Holland.

Lakatos, Imre (1977a [1962]): Infinite Regress and the Foundation of Mathematics. In Lakatos: *Philosophical Papers 2. Mathematics, Science, Epistemology.* John Worrall és Gregory Currie szerk., 3–23. Cambridge: Cambridge University Press. (Eredeti kiadása: *Aristotelian Society Supplementary* 36. kötet, 155–194.)

Lakatos, Imre (1977b): What Does a Mathematical Proof Prove? In Lakatos: *Philosophical Papers 2. Mathematics, Science, Epistemology.* John Worrall és Gregory Currie szerk. Cambridge: Cambridge University Press.

Lakatos Imre (1981 [1963–64]): *Bizonyítások és cáfolatok.* Ford.: Boreczky Elemér. Budapest: Gondolat. (Eredetileg: I. Lakatos: Proofs and Refutations. In *British Journal for the Philosophy of Science* 14. 1–25, 120–139, 221–243, 296, 342. Bővített kiadása: I. Lakatos: *Proofs and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery.* John Worrall és Elie Zahar szerk. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.)

Platón (1984): Állam. Hatodik könyv. In *Összes művei,* II. (510d–511a, 525b–d) Budapest: Európa.

Platón (1984): Hetedik levél. In *Összes művei,* III. (341 c–d, 342a–e, 343a, 344b) Budapest: Európa.

Tymoczko, Thomas (1986): *New Directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhauser.